UNIVERSITÉ DE BESANÇON

N° D'ORDRE :

2

FACULTÉ DES SCIENCES

THÈSE

PRÉSENTÉE POUR OBTENIR

LE GRADE D'INGÉNIEUR DOCTEUR

PAR

M. Pierre LANGUE

Ingénieur Mécanicien-horloger

ÉTUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE

DE LA

MARCHE D'UNE MONTRE A PLAT ET AU PENDU

Soutenue le 18 mai 1946, devant la Commission d'Examen

MM. HAAG, *Président*

BAILLAUD, MESNAGE, *Examinateurs*

TOULOUSE

EDOUARD PRIVAT Libraire-Éditeur

[redacted] ARTS, 14

1947

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547625_0047

UNIVERSITÉ DE BESANÇON

FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen :

M. GLANGEAUD, ✠ A.

Assesseur :

M JULLIEN, ✲, ✠ I, ✠.

Professeurs :

MM.

BAILLAUD, ✲, ✠ I, Astronomie.
VINCENSINI, ✠ A, Calcul différentiel et intégral.
HAAG, ✲, ✠ I, Mécanique rationnelle et appliquée.
TRILLAT, ✲, ✠ I, Physique.
TOURNEUX, ✲, ✠ I, ✠, ✠, Chimie générale.
JOANNIS, ✠ I, Chimie appliquée.
GLANGEAUD, ✠ A, Géologie et Minéralogie.
JULLIEN, ✲, ✠ I, ✠, Zoologie.
N..., Botanique générale.
MESNAGE, Chronométrie.
DUFFIEUX, ✠ I, MA, Chargé du cours de Physique.
TRONCHET, ✠ A, Chargé du cours de Botanique.

Secrétaire des Facultés : M. SEIGNIER, ✠ I.

UNIVERSITÉ DE BESANÇON

N° D'ORDRE :

2

FACULTE DES SCIENCES

THÈSE

PRÉSENTÉE POUR OBTENIR

LE GRADE D'INGÉNIEUR DOCTEUR

PAR

M. Pierre LANGUE

Ingénieur Mécanicien-horloger

ÉTUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE

DE LA

MARCHE D'UNE MONTRE A PLAT ET AU PENDU

Soutenue le 18 mai 1946, devant la Commission d'Examen

MM. HAAG, *Président*

BAILLAUD, MESNAGE, } *Examinateurs*

TOULOUSE

EDOUARD PRIVAT, Libraire-Éditeur

14, RUE DES ARTS, 14

1947

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

A

Monsieur JULES HAAG

Directeur de l'Institut de Chronométrie
de Besançon

En témoignage de ma
profonde reconnaissance.

Etude théorique et expérimentale de la marche d'une montre à plat et au pendu.

Par Pierre LANGUE

Ingénieur au « CETEHOR »

INTRODUCTION

La plupart des montres fabriquées actuellement sont munies d'un échappement à ancre ; son application à l'horlogerie portative a été faite à la fin du 18e siècle, l'Histoire de la Mesure du Temps par Berthoud nous dit que Mudge aurait publié en 1799 la description d'un échappement à ancre pouvant s'appliquer aux montres, le balancier était indépendant de l'ancre.

On peut dire que l'échappement à ancre a environ un siècle et demi d'application à l'horlogerie portative, et les résultats de marche des montres munies de cet échappement se sont montrés supérieurs aux résultats obtenus avec d'autres échappements, tel par exemple que l'échappement à cylindre, et équivalents à ceux obtenus avec l'échappement à détente, sans avoir la fragilité de celui-ci.

Les études faites sur l'échappement à ancre sont nombreuses, mais se rapportent en général aux tracés de cet échappement, en vue de déterminer les formes géométriques des différentes pièces le composant.

Dans ce travail je me suis proposé de faire une analyse théorique et expérimentale du fonctionnement de cet échappement, en vue de déterminer la perturbation de période subie par l'organe réglant : le système balancier spiral ; et d'en déduire les états d'une montre munie de l'échappement à ancre en fonctionnement dans les positions horizontale et verticale.

A cet effet, j'ai repris l'étude de l'amortissement du système balancier spiral et j'ai mis au point une méthode rapide pour déterminer les coefficients d'amortissement sans que les conditions extérieures changent sensiblement.

De la connaissance des coefficients d'amortissement et des caractéristiques du système oscillant et de l'échappement, j'en déduis les marches de la montre dans les positions horizontale et verticale.

J'ai ensuite vérifié expérimentalement ces résultats en substituant dans la montre au couple moteur fourni par le ressort de barillet, un couple moteur bien déterminé, fourni par la détente d'un ressort libre de toute contrainte.

Enfin je tire, tant de l'étude théorique que de l'étude expérimentale des conclusions pratiques et techniques pour réduire les écarts des marches à « plat » et au « pendu ».

Le plan suivi peut se résumer de la façon suivante :

1° Marche d'un chronomètre.

2° Étude de l'amortissement du système balancier-spiral.

3° Étude théorique de l'échappement à ancre de montre.

4° Marches d'une montre munie d'un échappement à ancre, dans les positions verticale et horizontale.

5° Exemples concrets étudiés, théoriquement et expérimentalement, comparaison des résultats.

6° Conclusions pratiques et techniques.

Ces recherches ont été effectuées au Laboratoire de l'Institut de Chronométrie de la Faculté des Sciences de Besançon.

A MM. Droz, Belin, Dessay, Vichot et Cloutot, professeurs d'ateliers à l'École d'Horlogerie, grâce à l'habileté manuelle desquels j'ai pu mener à bien ce travail, j'adresse mes sincères remerciements.

Enfin, je m'incline respectueusement devant M. Haag, Directeur de l'Institut de Chronométrie qui ne m'a pas ménagé ses conseils éclairés. Je le prie de croire à ma profonde reconnaissance.

I

Marche d'un Chronomètre.

Soit un chronomètre imparfait de période T, chaque période subit une perturbation $\Delta T = \varepsilon$, et la *ième* période subit une perturbation ε_i, la durée de celle-ci sera :

$$T_i = T + \varepsilon_i \qquad (1)$$

Utilisons ce chronomètre à la mesure du temps en supposant que son indication soit nulle à l'origine des temps.

Lorsque ce chronomètre aura accompli n oscillations dans des conditions de fonctionnement bien définies, l'heure indiquée par ce chronomètre sera :

$$H = nT$$

et l'heure vraie sera à l'instant t

$$H_V = \sum_0^n T_i = nT + \sum_0^n \varepsilon_i = t$$

La marche $M(t)$ de ce chronomètre à l'instant t sera la différence algébrique entre l'heure indiquée par ce chronomètre et l'heure vraie, et nous aurons :

$$M(t) = H - H_V = -\sum_0^n \varepsilon_i$$

que l'on peut écrire

$$M(t) = -\sum_0^n \frac{\varepsilon_i}{T} \cdot T$$

$\frac{\varepsilon_i}{T}$ est la perturbation relative de période au temps t que nous supposerons être une certaine fonction du temps soit

$$\frac{\varepsilon_i}{T} = \frac{\Delta T}{T} = f(t)$$

et l'on peut écrire

$$\sum_{o}^{n} \varepsilon_i = \sum_{o}^{n} f(t).T$$

Pendant une période c'est-à-dire pendant le temps T, $f(t)$ varie très peu, de sorte que l'on peut écrire approximativement :

$$f(t).T = \int_{t}^{t+T} f(t).dt$$

il s'en suit que $M(t)$ peut s'écrire

$$M(t) = -\sum_{o}^{n} \varepsilon_i = -\int_{o}^{t} f(t)\,dt$$

La marche de ce chronomètre à l'instant t_0, par exemple au bout de 24 heures sera

$$M(t_0) = -\int_{o}^{t_0} f(t)\,dt = R$$

Si l'on « règle » ce chronomètre de telle manière que l'on annule sa marche à l'instant t_0 nous aurons :

$$R = 0$$

et la marche à un instant quelconque t_1 sera alors

$$M(t_1) = -\int_{o}^{t_1} f(t)\,dt - R\frac{t_1}{t_0}$$

ou

$$(2) \qquad M(t_1) = -\int_{o}^{t_1} f(t)\,dt + \frac{t_1}{t_0}\int_{o}^{t_0} f(t)\,dt$$

La fig. (1) représente la courbe de marche C_1 du chronomètre qui devient C_2 après son « réglage » pour l'intervalle de temps $0 - t_0$.

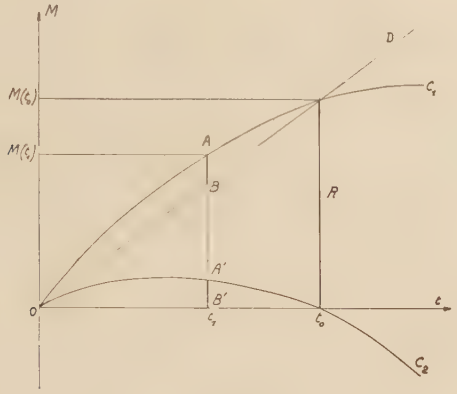

FIG. 1.

La marche $M(t_1)$ après réglage est l'ordonnée $\overline{A'B'}$ du point A' de la courbe et l'on a

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}$$

Plaçons le chronomètre imparfait dans d'autres conditions de fonctionnement mais « *réglé* » *dans les conditions définies précédemment.*

Dans les nouvelles conditions de fonctionnement :

ε_i devient ε'_i

et

$$\frac{\varepsilon'_i}{T} = f'(t),$$

La courbe fig. (2) représente la marche du chronomètre dans les nouvelles conditions de fonctionnement soit $M'(t_1)$ sa marche à l'instant t_1 nous aurons

$$(3) \qquad M'(t_1) = -\int_0^{t_1} f'(t)\,dt + \frac{t_1}{t_0}\int_0^{t_0} f(t)\,dt$$

Comme cas particulier la marche du chronomètre dans les nouvelles conditions de fonctionnement sera à l'instant t_0

$$(4) \qquad M'(t_0) = -\int_0^{t_0} f'(t)\,dt + \int_0^{t_0} f(t)\,dt$$

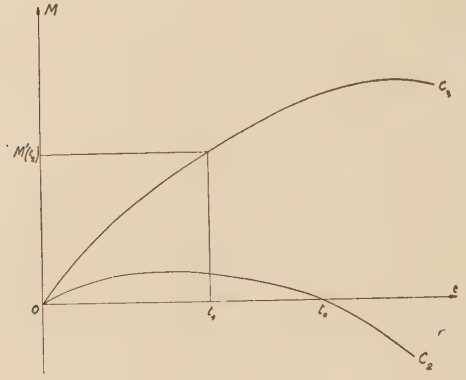

Fig. 2.

II

Étude de l'amortissement du système balancier spiral.

Il serait logique pour l'exposé, de déterminer la perturbation de période due à l'entretien du mouvement du balancier par l'échappement; mais comme on le verra plus loin, cette perturbation est une fonction de l'amplitude des oscillations et du couple d'entretien; celui-ci dépendant des conditions d'amortissement du système règlant, j'ai cru au préalable devoir exposer l'étude de l'amortissement du système balancier-spiral.

Dans sa thèse de doctorat[1], M. Arcay à étudié l'amortissement du système balancier-spiral.

Page 50, il indique une première méthode qui consiste à écarter le balancier de sa position d'équilibre d'angles connus, et à chronométrer le temps nécessaire pour qu'il revienne à sa position de repos. Le tracé d'une courbe d'amortissement demande

---

1 M. Arcay — Thèse de doctorat 1925.

un certain nombre de mesures avec différents angles d'écart ; cette méthode demande donc un temps assez long pour tracer une courbe d'amortissement.

Le même auteur a employé une méthode photographique basée sur l'enregistrement sur film du mouvement d'un point lumineux lié au balancier, cette méthode plus rapide que la précédente quant à l'enregistrement du phénomène, nécessite pour tracer la courbe d'amortissement de nombreux relevés sur machine à mesurer (on mesure le double du sinus de l'amplitude) ce qui représente une certaine incertitude lorsque celle-ci est voisine de $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$.

J'ai repris cette question et j'ai mis au point une méthode d'observation permettant un tracé assez rapide de la courbe d'amortissement d'un balancier spiral.

Méthode d'observation

Le seul travail préparatoire consiste à pointer sur la serge du balancier à étudier, un certain nombre de points équidistants situés sur une circonférence ayant pour centre l'axe du balancier. Dans les cas de nos mesures, le nombre de points est de 12 espacés de 30 en 30 degrés.

La montre étant naturellement débarrassée des autres organes de l'échappement est fixée sur le bâti d'un microscope à réticule. Le balancier étant au point mort, nous visons un des points de la serge à l'aide du réticule (le microscope étant facilement orientable en tous sens).

Sur le bâti du microscope est fixé un petit frein que l'on peut manœuvrer à l'aide d'une petite came et d'un bouton moleté.

Ce frein a pour but d'immobiliser ou de libérer le balancier.

La fig. 3 représente une montre en place sur le bâti du microscope, elle est fixée par deux chiens de serrage ; on voit nettement le frein destiné à immobiliser le balancier, ainsi que la petite came et le bouton moleté qui permettent d'écarter le frein du balancier.

On écarte le balancier de sa position d'équilibre de 360° et on le maintient dans cette position à l'aide du frein. On libère ensuite le balancier et l'on observe dans le microscope les instants où l'amplitude atteint successivement les valeurs déterminées par les pointés faits sur la serge.

Un de ces instants est déterminé lorsqu'on observe l'image de deux points de la serge se former exactement sous le réticule du microscope.

Les instants de passage sont enregistrés sur un chronographe à bande de papier muni de deux plumes enregistreuses[1], l'une enregistre les secondes d'une pendules mère, l'autre les instants de passage de l'amplitude du balancier par les valeurs connues ; ce deuxième enregistrement est commandé manuellement par l'opérateur qui observe les passages des points dans le microscope (vitesse de déroulement de la bande 10 m/m par seconde).

L'ensemble microscope et balancier spiral à étudier étant fixé sur le même bâti, l'étude de l'amortissement en positions horizontale et verticale, peut se faire dans un temps relativement court, sans que les conditions de fonctionnement du système changent sensiblement.

La fig. 4 représente l'ensemble des appareils de mesure. A gauche se trouve le microscope d'observation sur le bâti duquel est fixé le mouvement à étudier ; à droite on voit le chronographe enregistreur à deux plumes ; au centre se trouve un manipulateur (genre clef Morse) manœuvré par l'opérateur lorsque celui-ci observe les passages des points de la serge du balancier dans le microscope.

Résultats obtenus

J'ai appliqué cette méthode à l'étude de l'amortissement à « plat » et au « pendu » du système balancier spiral d'une montre de 39 m/m de diamètre et d'une montre de 23,5 m/m de diamètre.

Montre ⌀ 39

Position horizontale

Amplitudes	Instants de passage										Moyennes	Ecarts moyens	Ecarts moy. relat
360	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
330	3.2	3.2	3.3	3.5	3.2	3.5	3.3	3.3	3.2	3.2	3.3	0.09	0.027
300	6.9	7.1	7.2	7.2	7.1	6.9	6.9	6.9	6.9	7	7	0.11	16
270	10.8	10.8	10.7	10.8	10.9	10.7	10.7	10.7	11	11	10.8	0.09	8
240	15	15.3	15.1	15.2	15.1	15	15	15	15.1	15.2	15.1	0.08	5
210	19.9	20	19.9	19.8	19.8	19.7	19.7	19.9	19.9	19.9	19.9	0.07	4
180	25.3	25.1	25.5	25.3	25.4	25	25.2	25	25.3	25.2	25.2	0.13	5
150	31.6	31.4	31.7	31.6	31.7	31.8	31.6	31.3	31.8	31.9	31.6	0.16	5
120	39	38.9	39.4	39.2	39.3	39.1	39	39	39.2	39.5	39.2	0.15	4
90	48	48.2	48.3	48.4	48.4	48	48.3	48.3	48.5	48.4	48.3	0.12	3
60	60.6	60.2	61	60.8	60.4	60.4	60.7	60.9	61	61.1	60.7	0.25	4
30	81.2	80.6	81.5	81.4	81.5	81.2	81.9	81.6	81.7	82.3	81.4	0.34	4
0	139	139.5	140	140.2	140	140	140.6	140.2	140.2	140	140.4	0.74	5

Position verticale

Amplitudes	Instants de passage										Moyennes	Ecarts moyens	Ecarts moy. relat.
360	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
330	2.9	2.3	2.6	2.5	2.5	3	2.5	2.5	2.4	2.5	2.6	0.15	0.058
300	5.3	5.3	5.2	5.2	5.2	5.3	5.3	5.2	5.3	5.3	5.3	0.04	8
270	8	8	8	8.1	8	8.1	8.1	8	8.1	8.2	8.1	0.05	7
240	11.2	11.1	11.2	11.1	11.2	11	11.1	11.1	11.1	11.2	11.1	0.05	5
210	14.6	14.4	14.7	14.3	14.5	14.5	14.7	14.6	14.5	14.7	14.5	0.11	8
180	17.7	18	17.9	18	17.9	18	17.9	17.9	17.9	17.7	17.9	0.07	4
150	21.6	22	21.7	21.7	21.8	22.2	21.8	21.6	21.8	22	21.9	0.15	7
120	26	26	26.1	26.1	26.1	26	26.1	25.8	26	26.1	26	0.08	3
90	30.3	30.3	30.6	30.4	30.8	30.9	30.6	30.6	30.6	30.7	30.6	0.16	5
60	35.4	35	36	35	35.9	35.7	35.8	36	36	36	35.9	0.14	4
30	41	41.7	41.7	42	42	41.7	41.7	41.6	42	41.5	41.7	0.18	4
0	48.3	50	49	49	49.3	49.1	50.2	48.9	49.6	49.4	49.3	0.40	8

FIG. 5.

1 Chronographe portatif enregistreur à deux plumes de la C. D. C.

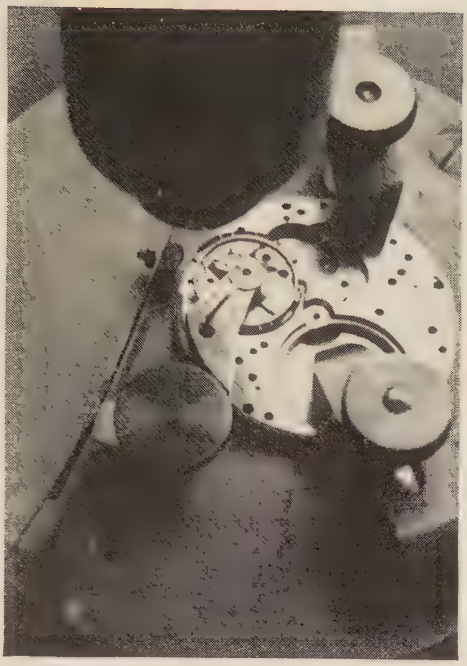

Fig. 3.

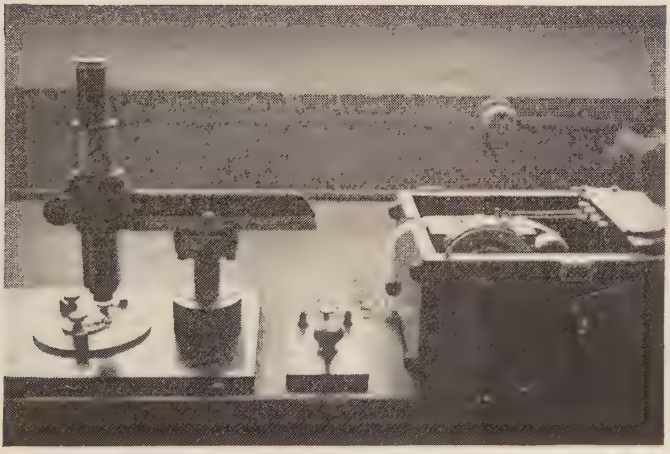

Fig. 4.

J'ai fait dans chacune des deux positions, 10 enregistrements dont les résultats sont consignés dans les tableaux suivants :

Montre ϕ 23.5

Position horizontale

Amplitudes	Instants de passage										Moyennes	Ecarts moyens	Ecarts moy. relat.
360	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
330	2.6	2.4	2.4	2.5	2.7	2.5	2.4	2.5	2.8	2.8	2.6	0.14	0.054
300	3.9	4.1	4.9	5	5.4	5	5.1	5.6	5.8	5.6	5	0.46	0.09
270	6.1	7	7.6	8	8	7.5	7.9	8.5	8.8	8	7.7	0.56	8
240	9	9.7	10.6	11	11	10.8	10.8	11.9	11.9	11	10.8	0.59	55
210	11.8	12.7	13.4	14.5	14.6	13.9	14.2	15.8	15.6	15	14.2	0.95	6.5
180	15	16.1	16.9	18	18.3	17.4	17.9	20.5	19.8	19	17.9	1.25	7
150	19.7	19.8	20.6	22.3	22.8	21.2	21.9	25	24.3	23.7	22	1.59	7
120	24.3	24	24.7	27	27.9	25.9	26.7	30.1	29.5	28.9	25.7	2.22	8.5
90	27	29.1	29.1	33.1	33.9	31.9	32	37.9	35.9	36.2	32.6	2.80	8.5
60	32.3	36	35.3	41	41.8	39.3	39.7	47.1	44.7	44.8	40.1	3.78	9.5
30	37.1	44.3	42.6	49.2	50	49	46	61.8	55.9	58	49.3	5.55	11
0	43	55.8	55	64.2	67.5	64	58.6	85.3	69.9	73.8	64.2	7.93	12

Position verticale

Amplitudes	Instants de passage										Moyennes	Ecarts moyens	Ecarts moy. relat.
360	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
330	1.8	1.3	1.6	1.5	1.7	1.3	1.9	1.5	1.6	1.6	1.6	0.14	0.09
300	3.1	2.7	3	3.1	3.3	2.5	3.2	3	3.1	3	3	0.16	5.5
270	4.5	4.1	4.6	4.5	4.6	4.1	4.6	4.4	4.7	4.4	4.5	0.15	3.5
240	6	5.6	6.1	6	6.3	5.3	6.2	6.2	6.4	6.1	6	0.26	4.5
210	7.5	7.2	7.7	7.9	7.9	6.7	8.1	8	8	7.9	7.7	0.32	4
180	9.3	9.2	9.6	9.6	9.6	8.2	9.9	9.9	9.8	9.8	9.4	0.36	4
150	11.2	11.8	11.4	11.4	11.7	10	11.7	11.7	11.6	11.3	11.3	0.34	3
120	13.3	13.1	13.6	13.7	13.6	12.1	13.7	13.8	13.8	13.2	13.4	0.36	2.5
90	15.3	15.3	15.3	15.7	15.6	14.3	16.1	16	15.9	15.5	15.3	0.40	2.5
60	17.5	17.3	17.8	17.7	18	16.5	18.2	18.3	18	17.9	17.7	0.38	2
30	20	20.2	20.1	20.3	20.5	19.2	20.7	20.7	20.9	20.5	20.3	0.35	1.7
0	22.8	23.3	23	23.6	23.9	22.1	24	24.1	24.1	23.8	23.6	0.53	2.5

FIG. 6.

(*fig.* 5 et 6). Les courbes d'amortissement (*fig.* 7 et 8) ont été tracées en prenant la moyenne des 10 enregistrements.

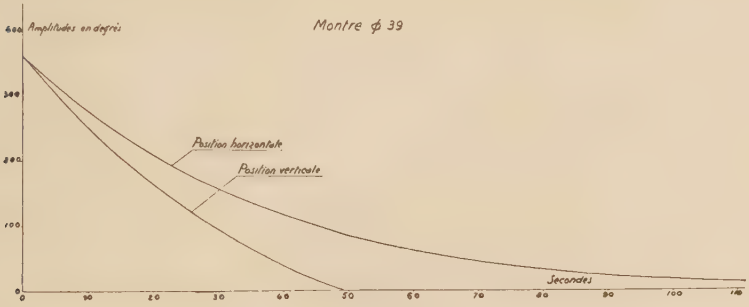

FIG. 7.

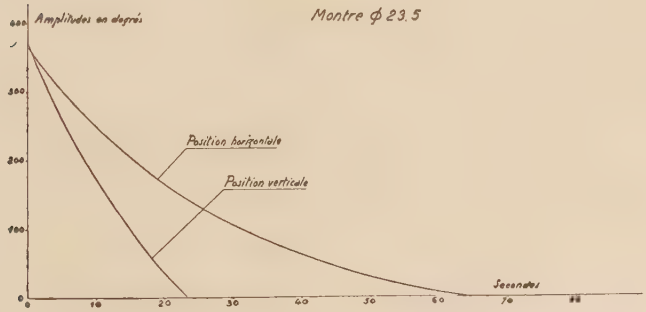

FIG. 8.

Les deux colonnes de droite des tableaux de mesures donnent : la première l'écart moyen et la seconde l'écart moyen relatif ; on remarque que ce dernier est en général voisin de 0,005 pour la montre de grand format, tandis qu'il est environ de 0,05 pour le petit calibre. Ceci indique une fidélité du phénomène nettement meilleure pour une grande montre que pour une petite.

En menant les tangentes aux courbes d'amortissement on peut

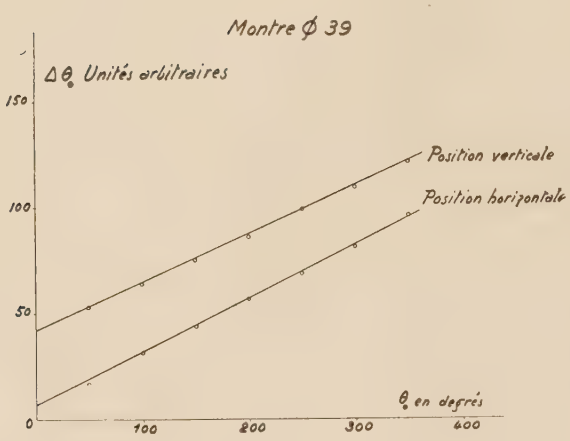

Fig. 9.

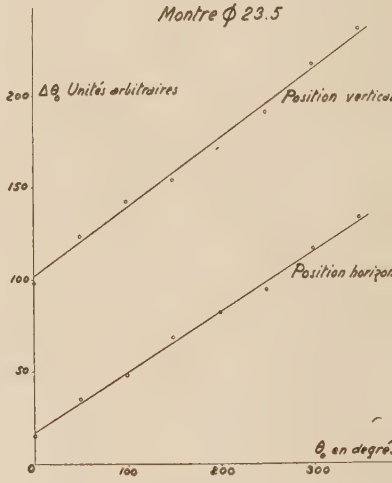

Fig. 10.

en déduire les courbes $\Delta\theta_0$ en fonction de θ_0 (*fig.* 9 et 10), l'on constate que $\Delta\theta_0$ est une fonction linéaire de θ_0 de la forme

$$a_0 + a_1\ \theta_0$$

ce qui montre que dans l'amortissement du système balancier spiral, nous n'avons en présence qu'un frottement constant et un frottement visqueux proportionnel à la vitesse.

Dans ce cas l'équation différentielle du mouvement est :

$$A\,\theta'' + a\,\theta' + K\,(\theta - f) = 0$$

En posant

$$\alpha = \frac{a}{2A} \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{A}} \qquad T = \frac{\pi}{\omega}$$

le décrément D est égal à

$$D = e^{-\alpha T}$$

et l'on a en désignant par θ_n l'amplitude au temps $t = n\,T$ et par θ_{2n} l'amplitude au temps $2t = 2\,n\,T$

$$\alpha = \frac{1}{t}\, lg\, \frac{\theta_0 - \theta_n}{\theta_n - \theta_{2n}} \quad ; \quad f = \frac{\alpha T}{2}\ \frac{\theta_n^2 - \theta_0 \cdot \theta_{2n}}{\theta_0 + \theta_{2n} - 2\theta_n}$$

Pour calculer α et f, j'ai employé les parties des courbes d'amortissement comprises entre 300° et 100°, amplitudes qui correspondent aux limites pratiques du fonctionnement de l'échappement.

J'ai obtenu pour la montre de 39 m/m de diamètre en position horizontale :

$$\theta_0 = 300° \quad \theta_n = 175° \quad \theta_{2n} = 100° \quad 2t = 38{,}2$$

ce qui donne

$$\alpha = 0{,}027 \quad f = 0{,}0006$$

en position verticale :

$$\theta_0 = 300° \quad \theta_n = 185° \quad \theta_{2n} = 100° \quad 2t = 23{,}9$$

on obtient

$$\alpha = 0{,}025 \text{ et } f = 0{,}006$$

Dans le cas de la montre de 23,5 m/m de diamètre on a en position horizontale :

$$\theta_0 = 300° \quad \theta_n = 179° \quad \theta_{2n} = 100° \quad 2t = 25{,}6$$

$$\alpha = 0{,}033 \quad f = 0{,}0027$$

et en position verticale :

$$\theta_0 = 300° \quad \theta_n = 189° \quad \theta_{2n} = 100° \quad 2t = 11{,}8$$

$$\alpha = 0{,}038 \quad f = 0{,}017$$

Ces résultats montrent que le frottement visqueux est sensiblement le même dans les deux positions; quant au frottement

constant dans les deux exemples précédents, il est environ 10 fois plus important en position verticale « au pendu » qu'en position horizontale de la montre.

III

Étude théorique de l'échappement à ancre de montre

Cette étude a pour but d'établir la perturbation d'isochronisme due à l'échappement à ancre de montre, en tenant compte du dégagement, du parcours libre de la roue avant son contact avec le plan d'impulsion, et de l'impulsion.

Le mouvement libre de la roue après le dégagement, a été signalé par Grosmann (Horlogerie Théorique page 389, tome I) mais cet auteur n'a pas étudié l'influence de ce phénomène sur la durée des oscillations du système balancier spiral.

NOTATIONS. — J'appelle θ, α, ρ les élongations du balancier, de l'ancre et de la roue d'échappement, comptées positivement dans le sens du mouvement de ces trois mobiles, pendant l'impulsion d'entrée par exemple, et j'admets l'identité des impulsions à l'aller et au retour, et que l'échappement ne « boite » pas.

On aura le tableau suivant indiquant les positions des mobiles pour les différentes phases de fonctionnement de l'échappement.

Balancier	Ancre	Roue	
θ_1	α_1	ρ_1	Début du dégagement à l'entrée
θ_2	α_2	ρ_2	Fin du dégagement
θ_3	α_3	ρ_3	Commencement de l'impulsion
θ_4	α_4	ρ_4	Fin de l'impulsion
θ_5	α_5	ρ_5	Chute intérieure

Nous avons les relations suivantes entre ces angles

$$(5)\quad \begin{cases} \theta_2 - \theta_1 = D & \textit{angle de dégagement du balancier} \\ \alpha_2 - \alpha_1 = \Delta & \textit{angle de dégagement de l'ancre ou angle de repos} \\ D = p_1 \Delta & p_1 \text{ est le rapport des angles de rotation du balancier et de l'ancre, entre deux positions quelconques pendant le dégagement; } p_1 \text{ est sensiblement constant.} \end{cases}$$

On a aussi

$\rho_2 - \rho_1 = r$ *angle de recul de la roue* tel que le donne le tracé géométrique de l'échappement.

$r = p'_1 \Delta$ p'_1 est le rapport des angles de rotation de la roue et de l'ancre entre deux positions quelconques pendant le dégagement; p'_1 est sensiblement constant.

$\theta_4 - \theta_2 = i$ *Angle d'impulsion du balancier* d'après le tracé géométrique de l'échappement.

$\alpha_4 - \alpha_2 = j$ *Angle d'impulsion de l'ancre* d'après le tracé de l'échappement.

(6) $i = p_1 j$

$\rho_4 - \rho_2 = h$ *Angle d'impulsion de la roue* toujours d'après le tracé.

$h = p'_2 j$ p'_2 est le rapport des angles de rotation de la roue et de l'ancre entre deux positions quelconques de ces mobiles pendant l'impulsion; p'_2 est aussi sensiblement constant.

Nous avons aussi :

(7)
$$\begin{cases} D + i = L & \textit{angle de levée du balancier.} \\ \Delta + j = \lambda & \textit{angle de levée de l'ancre.} \\ L = p_1 \lambda & \\ \text{d'autre part} & \\ \rho_5 - \rho_4 = c & \text{est la } \textit{chute} \text{ de la roue d'échappement} \end{cases}$$

et nous avons

$$\theta_4 = \theta_5 , \quad \alpha_4 = \alpha_5$$

en négligeant la durée de la chute.

Le décollement de la roue avec l'ancre nous permet de poser :

(8)
$$\begin{cases} \theta_3 - \theta_2 = d & \textit{diminution de l'angle d'impulsion géométrique du balancier} \text{ due au parcours libre de la roue d'échappement.} \\ \rho_3 - \rho_2 = \delta & \textit{diminution de l'angle d'impulsion géométrique de la roue} \text{ due à son parcours libre après le dégagement. On pose aussi} \end{cases}$$

(9)
$$\begin{cases} \theta_4 - \theta_3 = i' & \textit{angle d'impulsion réelle du balancier.} \\ \rho_4 - \rho_3 = h' & \textit{angle d'impulsion réelle de la roue.} \\ & \text{On pose aussi} \\ \theta_3 - \theta_1 = D' & \end{cases}$$

Perturbation de la période due à l'échappement à ancre

La perturbation relative de la période due à l'échappement est :

$$(10) \qquad \frac{\Delta T}{T} = \frac{C T^2}{A \pi^3} . X$$

en appelant T la demi-période, A le moment d'inertie du balancier, C le couple appliqué à la roue d'échappement et X l'expression suivante

$$X = \frac{1}{\theta_0^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \mu \theta \, d\varphi$$

dans cette intégrale φ désigne la phase définie par

$$\theta = \theta_0 \sin \varphi$$

θ_0 est l'amplitude des oscillations et μ représente le rapport du couple reçu par le balancier au couple C.

Pendant l'impulsion, le balancier reçoit un couple moteur kC, pendant le dégagement, il subit de la part de l'ancre un couple résistant que nous désignerons par $-k'$ C, k et k' sont sensiblement constants.

μ vaut donc $\begin{cases} k \text{ pour } \theta_4 > \theta > \theta_3 \\ -k' \text{ pour } \theta_2 > \theta > \theta_1 \end{cases}$ et

nous avons d'autre part $\theta_4 = -\theta_1$ ce qui exprime que l'échappement ne « boite » pas.

Nous aurons

$$X \theta_0^2 = \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} k \, \theta \, d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} k' \theta \, d\varphi$$

en effectuant les intégrations on trouve :

$$X \theta_0^2 = k \theta_0 (\cos \varphi_3 - \cos \varphi_1) - k' \theta_0 (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)$$

En exprimant les phases au moyen des élongations, on obtient :

$$X = \frac{1}{\theta_0} \left[k \left(\sqrt{1 - \frac{\theta_3^2}{\theta_0^2}} - \sqrt{1 - \frac{\theta_1^2}{\theta_0^2}} \right) - k' \left(\sqrt{1 - \frac{\theta_1^2}{\theta_0^2}} - \sqrt{1 - \frac{\theta_2^2}{\theta_0^2}} \right) \right]$$

En développant les radicaux suivant le binome[1], on obtient

$$(11) \qquad X = \frac{1}{2\theta_0^3}\left[K(\theta_1^2-\theta_3^2)+K'(\theta_1^2-\theta_2^2)\right]$$

Nous avons d'après (5), (6) et (7)

$$(12) \qquad \begin{cases} -\theta_1 = \dfrac{i+D}{2}\ ;\quad \theta_2 = -\dfrac{i-D}{2}\ ;\quad -\theta_1 = \dfrac{i'+D'}{2}\ ;\quad \theta_3 = -\dfrac{i'-D'}{2} \\ \text{d'où}\ \ \theta_1^2-\theta_2^2 = iD\ ;\quad \theta_1^2-\theta_3^2 = i'D' \end{cases}$$

en portant dans (11) il vient

$$X = \frac{1}{2\theta_0^3}\,(Ki'D'+K'iD)$$

De (12), (8) et (9) nous tirons :

$$i-i' = D'-D = d\ ;\quad D' = D+d\ ;\quad i' = i-d$$

d'où

$$i'D' = iD+d\,(i-D-d)$$

et (20) s'écrit alors

$$(13) \qquad X = \frac{1}{2\theta_0^3}\left[(K+K')\,iD+dK\,(i-D-d)\right]$$

Le premier terme de X correspond au retard dû au *fonctionnement géométrique* de l'échappement, le second est dû à la chute de la roue sur la face d'impulsion.

Nous allons calculer tous les termes du crochet en fonction des caractéristiques géométriques du tracé.

Calcul de k'. — Nous supposerons l'échappement tangent et une roue de 15 dents ce qui est généralement le cas. Soit φ l'angle de tirage et f l'angle de frottement de la dent contre la face de repos, et nous supposerons que les repos soient vus des centres de la roue et de l'ancre sous les angles respectifs de 60 à 120°. Un calcul de statique élémentaire nous donne :

$$(14) \qquad K' = \frac{1}{p_1}\cdot\frac{tg(\varphi+f)}{\sqrt{3}} = \frac{\lambda}{L}\cdot\frac{tg(\varphi+f)}{\sqrt{3}}$$

Calcul de k. — Si l'on néglige les frottements pendant l'impulsion, le rapport du couple reçu par le balancier pendant l'impulsion, au couple appliqué à la roue d'échappement est égal

---

1. Développement limité valable si θ_1^2 est petit vis-à-vis de θ_0^2.

à l'inverse du rapport des angles de rotation de ces mobiles pendant l'impulsion. Si l'on désigne par Γ le couple reçu par l'ancre pendant l'impulsion, nous pourrons écrire ;

$$(15)\begin{cases} \dfrac{\Gamma}{c}=\dfrac{h}{j}=p_2'=\dfrac{\frac{\pi}{15}-c}{\lambda-\Delta}\ ;\ \dfrac{kc}{\Gamma}=\dfrac{j}{i}=\dfrac{1}{p_1}=\dfrac{\lambda}{L}=\dfrac{\Delta}{D}=\dfrac{\lambda-\Delta}{L-D}=\dfrac{\lambda-\Delta}{i} \\ \dfrac{kc}{c}=k=\dfrac{h}{i}=\dfrac{h'}{i'}=\dfrac{\lambda}{L}\ \dfrac{\frac{\pi}{15}-c}{\lambda-\Delta} \\ \text{nous aurons aussi } \dfrac{r}{\Delta}=\dfrac{tg\varphi}{\sqrt{3}} \text{ et } k=\dfrac{h-h'}{i-i'}=\dfrac{\delta}{d} \end{cases}$$

De (15) nous tirons :

$$(16)\quad \begin{cases} i=\dfrac{L(\lambda-\Delta)}{\lambda}\ ;\ D=\dfrac{L\Delta}{\lambda}\ ;\ d=\dfrac{\delta}{k} \\ d=\dfrac{\delta L}{\lambda}\ \dfrac{\lambda-\Delta}{\frac{\pi}{15}-c}\ ;\ iD=\dfrac{L^2}{\lambda^2}.\Delta.(\lambda-\Delta) \end{cases}$$

En tenant compte de (14), (15) et (16), (13) s'écrit alors après simplifications :

$$(17)\quad X=\frac{L}{2\theta_0^3\lambda}\left\{\Delta\left[\left(\frac{\pi}{15}-c\right)+(\lambda-\Delta)\frac{tg(\varphi+f)}{\sqrt{3}}\right]+\delta\left(\lambda-2\Delta-\delta\frac{\lambda-\Delta}{\frac{\pi}{15}-c}\right)\right\}$$

Calcul de δ. — La dent quitte la face de repos de l'ancre avec une vitesse angulaire $-\rho'_0$; soit ρ' sa vitesse à un instant quelconque et ρ son azimut compté à partir de l'instant où elle quitte la face de repos; soit A'' le moment d'inertie de la roue d'échappement.

Au moment du dégagement, la vitesse augulaire θ' du balancier est voisine de son maximum et vaut

$$\theta'_0 = \omega\,\theta_0$$

Pendant le dégagement l'ancre tourne avec une vitesse α'_0 sensiblement constante et l'on a en valeurs absolues :

$$(18)\quad \frac{\alpha'_0}{\theta'_0}=\frac{1}{p_1}=\frac{\lambda}{L}=\frac{\alpha'_0}{\omega\,\theta_0}$$

$$(19)\quad \frac{\alpha'_0}{\rho'_0}=\frac{1}{p'_1}=\frac{\sqrt{3}}{tg\varphi}$$

L'équation du mouvement de l'ancre est

$$(20) \qquad \alpha = \alpha'_0 t$$

et l'équation du mouvement libre de la roue est

$$(21) \qquad \rho = -\rho'_0 t + \frac{C t^2}{2A''}$$

Soit t_1 la durée du mouvement de l'ancre et de la roue depuis la fin du dégagement jusqu'à l'instant de leur rencontre, α_1 l'angle parcouru par l'ancre et ρ_1 l'angle parcouru par la roue.

$$\rho_1 = \delta$$

(20) et (24) deviennent

$$(22) \qquad \alpha_1 = \alpha'_0 t_1 \qquad (23) \qquad \delta = -\rho'_0 t_1 + \frac{C t_1^2}{2A''}$$

Éliminons t_1 entre (22) et (23); δ s'écrit alors

$$(24) \qquad \delta = -\rho'_0 \frac{\alpha_1}{\alpha'_0} + \frac{C}{2A''}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha'_0}\right)^2$$

Nous pouvons écrire d'autre part une autre relation entre les angles parcourus par l'ancre et la roue depuis la fin du dégagement jusqu'à leur rencontre, en tenant compte de (15)

$$(25) \qquad \frac{\alpha_1}{\delta} = \frac{j}{h} = \frac{1}{p'_2} = \frac{\lambda - \Delta}{\frac{\pi}{15} - c}$$

cette relation découle de la définition que nous avons donnée précédemment de p'_2 (16)

Nous avons le système (18), (19), (24) et (25) à quatre inconnues α_1, α'_0, δ et ρ'_0; sa résolution est élémentaire et nous obtenons pour δ l'expression suivante :

$$(26) \qquad \delta = \frac{A'' \lambda^2 \theta_0^2}{C\ L^2\ T^2}\ P$$

en posant

$$(27) \qquad P = 2\pi^2 \left[\frac{\frac{\pi}{15} - c}{\lambda - \Delta}\right]^2 \cdot \left[1 + \frac{(\lambda - \Delta)\ tg\ \varphi}{\left(\frac{\pi}{15} - c\right)\sqrt{3}}\right]$$

(17) devient alors

$$(28)\quad X = \frac{L}{2\theta_0^3\lambda}\left[Q + \frac{A''\lambda^2\theta_0^2}{C\,L^2\,T^2}\,P\left(\lambda - 2\Delta - \frac{A''\lambda^2\theta_0^2}{C\,L^2\,T^2}\cdot P.\,\frac{\lambda-\Delta}{\frac{\pi}{15}-c}\right)\right]$$

en posant

$$(29)\quad Q = \Delta\left[\left(\frac{\pi}{15} - c\right) + (\lambda-\Delta)\frac{tg\,(\varphi+f)}{\sqrt{3}}\right]$$

Nous aurons en portant dans (19) et en développant :

$$(30)\quad \frac{\Delta T}{T} = \frac{C\,T^2 Q\,L}{2A\pi^3\theta_0^3\lambda} + \frac{P(\lambda-2\Delta)A''\lambda}{2\pi^3 A\,\theta_0 L} - \frac{P^2(\lambda-\Delta)\lambda^3 A''^2\theta_0}{2\pi^3(\frac{\pi}{15}-c)AL^3T^2C}$$

Telle est l'expression donnant la perturbation relative de période due à l'échappement à ancre de montre; sous cette forme c'est une fonction du couple d'entretien C et de l'amplitude θ_0 du mouvement entretenu soit :

$$(31)\quad \frac{\Delta T}{T} = J\,(C, \theta_0)$$

Considérons une montre fonctionnant à « plat »; les conditions de fonctionnement du balancier sont définies par un coefficient d'amortissement a dû au frottement constant et un coefficient d'amortissement b dû au frottement visqueux. Lorsqu'on passe au « pendu », le coefficient b ne change pas, seul le coefficient a devient a'.

Dans les deux cas, le couple fourni par le ressort de barillet à la roue d'échappement est la même fonction du temps soit :

$$(32)\quad C = F\,(t)$$

A « plat » : l'amplitude θ_0 est à chaque instant liée au couple C et au coefficient a par une relation

$$(33)\quad \theta_0 = G\,(C, a) \text{ ou } C = K\,(\theta_0, a)$$

Pour une même position, a reste constant pendant le fonctionnement de la montre, en tenant compte de (32), (33) devient :

$$(34)\quad \theta_0 = H\,(t)$$

En éliminant θ_0 et C de (31) en tenant compte de (32) et (34) on obtient :

$$(35) \quad \frac{\Delta T}{T} = f(t)$$

En se plaçant maintenant au « pendu », (32) est conservé et nous avons :

$$(36) \quad \theta_0 = G'(C, a')$$

c'est-à-dire ;

$$\theta_0 = H'(t)$$

et (35) devient dans ce cas

$$(37) \quad \frac{\Delta T}{T} = f'(t)$$

Calcul de C *en fonction de* θ_0 *et* a. — Le calcul du couple C à appliquer à la roue d'échappement pour entretenir un mouvement vibratoire du système balancier-spiral d'amplitude θ_0, peut se déterminer en écrivant que l'énergie fournie à chaque oscillation est égale à l'énergie dissipée pendant le même temps par les résistances passives.

Calcul de l'énergie e *fournie à chaque oscillation.* — Elle est égale à l'énergie fournie pendant l'impulsion moins l'énergie absorbée pendant le dégagement. Dans ce calcul je néglige l'influence des chocs.

Le premier choc se produit lorsque la cheville de plateau entre en contact avec l'entrée de la fourchette au début du dégagement, il produit une perte d'énergie cinétique du balancier. Le second se produit lorsque la roue rattrape le plan d'impulsion de l'ancre après son parcours libre, l'entrée de la fourchette choque la cheville de plateau et l'énergie cinétique du balancier est augmentée, ces deux chocs agissent en sens inverse et l'on peut estimer qu'il y a compensation de leurs effets.

La perte d'énergie due aux chocs est nulle si les chocs sont parfaitement élastiques.

Nous pouvons écrire ;

$$e = k\,C\,i' - k'\,C\,D$$

en tenant compte de (14), (16) et (16) il vient :

$$e = C\left[h' - \frac{\Delta\, tg\,(\varphi+f)}{\sqrt{3}}\right]$$

On a d'autre part

$$h' = h - \delta - r = \frac{\pi}{15} - c - \delta - r$$

en tenant compte de (35), écrivons que l'énergie fournie par l'échappement est égale à l'énergie dissipée par les résistances passives.

$$(38) \qquad e = RC - \frac{A''\lambda^2\,\theta_0^2\,P}{L^2T^2} = a\,\theta_0 - b\theta_0^2$$

expression dans laquelle nous avons posé

$$(39) \qquad R = \frac{\pi}{15} - c - \frac{\Delta\, tg\,(\varphi+f')}{\sqrt{3}}$$

et où a et b sont les coefficients d'amortissement dûs au frottement constant et au frottement visqueux.

Avec les notations de l'équation différentielle du mouvement libre du balancier, nous avons l'identité

$$a\,\theta_0 + b\,\theta_0^2 = \frac{A\pi^2}{T}\left(\frac{2f\theta_0}{T} + \alpha\theta_0^2\right)$$

ce qui nous donne

$$(40) \qquad a = 2fk \;\; ; \;\; b = \alpha k T.$$

De (38) l'on tire l'expression du couple C en fonction de l'amplitude θ_0 du mouvement entretenu.

$$(41) \qquad C = S\theta_0 + U\theta_0^2$$

en posant

$$(42) \qquad S = \frac{a}{R} \quad \text{et} \quad U = \frac{b}{R} + \frac{A''\lambda^2 P}{L^2T^2R}$$

Calcul de $\frac{\Delta T}{T}$ *en fonction de* θ_0. — Dans l'expression (30) donnant $\frac{\Delta T}{T}$ en fonction de C et de θ_0 éliminons C en tenant compte de (41), il vient en posant :

$$(43)\quad \begin{cases} \frac{a}{A}=p\ ; \quad \frac{b}{A}=q\ ; \quad \frac{\lambda}{L}=r\ ; \quad \frac{A''}{A}=s \\ \text{et } H=\frac{Q}{2\pi^3 R}\ ; \quad I=\frac{Q\,P}{2\pi^3 R}+\frac{P(\lambda-2\Delta)}{2\pi^3}\ ; \quad J=\frac{P^2(\lambda-\Delta)R}{2\pi^3\left(\frac{\pi}{15}-c\right)} \end{cases}$$

$$(44)\quad \frac{\Delta T}{T}=\frac{HpT^2}{r\theta_0^2}+\frac{H\frac{q}{r}T^2+Isr}{\theta_0}-\frac{Js^2r^3}{pT^2+(qT^2+Psr^2)\theta_0}$$

Remarquons que les facteurs p, q, r, s sont les quantités les plus variables selon les diverses constructions d'échappement, nous étudierons les variations des écarts entre les marches à « plat » et au « pendu » en fonction de ces différents paramètres choisis sur des exemples concrets.

Afin de simplifier les calculs nous écrirons :

$$(45)\quad \frac{\Delta T}{T}=\frac{a_1}{\theta_0^2}+\frac{b_1}{\theta_0}-\frac{c_1}{d_1+e_1\theta_0}$$

en posant

$$(46)\quad \begin{cases} a_1=\frac{HpT^2}{r}\ ; \quad b_1=\frac{HqT^2}{r}+Isr\ ; \\ c_1=Js^2r^3\ ; \quad d_1=pT^2\ ; \quad e_1=qT^2+Psr^2 \end{cases}$$

IV

Marches d'une montre munie d'un échappement à ancre

Dans les expressions (2) et (3) permettant de calculer l'état d'un chronomètre, figure l'intégrale ;

$$\int_0^t \frac{\Delta T}{T}\,dt$$

dans laquelle $\frac{\Delta T}{T}$ est la perturbation de période exprimée en fonction du temps, soit

$$\frac{\Delta T}{T} = f(t)'$$

(45) nous donne $\frac{\Delta T}{T}$ en fonction de θ_0.

Dans une montre le couple moteur est fourni par la détente du ressort de barillet; en première approximation ce couple est de la forme

$$(47) \qquad C = C_0 - kt$$

C_0 est le couple fourni par le ressort après armage complet, et k est une constante positive qui dépend des caractéristiques du ressort et du barillet.

Si la formule (47) représente la première approximation du couple moteur pour la vérification expérimentale j'ai réalisé par un ressort libre de toute contrainte la condition de linéarité en fonction du temps exprimé par (47).

Dans le système (41), (45) et (47) nous pourrions éliminer C et θ_0 de manière à obtenir $\frac{\Delta T}{T}$ en fonction de t, ceci nous conduirait à introduire des radicaux dans la quantité à intégrer.

Éliminons C entre (50) et (56), il vient en posant

$$(48) \quad A_1 = \frac{S}{2U} \; ; \quad B_1 = \frac{S^2}{4U^2} + \frac{C_0}{U} \; ; \quad D_1 = \frac{k}{U}$$

$$(49) \qquad \theta_0 = -A_1 + \sqrt{B_1 - D\,t}$$

valeur de l'amplitude au temps t.

Nous désignerons désormais par θ_0 l'amplitude du temps 0 et par θ_t l'amplitude au temps t, nous aurons donc :

$$(50) \quad \theta_0 = -A_1 + \sqrt{B_1} \quad \text{et} \quad \theta_t = -A_1 + \sqrt{B_1 - D_1 t}$$

Calcul de $\int_0^t \frac{\Delta T}{T} dt = Y$

Comme il a été dit précédemment, il est préférable pour calculer cette intégrale de faire le changement de variable de t en θ_t donné par (50)
de (50) nous tirons :

$$dt = -\frac{2}{D_1}(\theta_t + A_1)\, d\theta_t$$

$\frac{\Delta T}{T}$ est donné par (45), il vient donc

$$Y = -\frac{2}{D_1}\int_{\theta_0}^{\theta_t}\left(\frac{a_1}{\theta_t^2}+\frac{b_1}{\theta_t}-\frac{c_1}{d_1+e_1\theta_t}\right)(\theta_t+A_1)\, d\theta_t$$

On obtient en intégrant

$$(51)\quad Y = \frac{2}{D_1}\left[a_1 A_1\left(\frac{1}{\theta_t}-\frac{1}{\theta_0}\right)+\left(b_1-\frac{c_1}{e_1}\right)(\theta_0-\theta_t)+(a_1+b_1 A_1)\, lg\frac{\theta_0}{\theta_t} + (d_1-A_1 e_1)\frac{c_1}{e_1^2}\, lg\frac{d_1+e_1\theta_0}{d_1+e_1\theta_t}\right].$$

Remarque : Dans cette expression, le coefficient d'amortissement a dû au frottement constant figure dans a_1, A_1, d_1, θ_0 et θ_t, mais ne figure pas dans D_1 qui est une constante lorsqu'on passe du « plat » au « pendu ».

Expression entrant dans le calcul de l'état d'une montre et provenant de l'inertie du spiral.

La perturbation instantanée de période due à l'inertie du spiral a été établie par M. Haag[1]. J'ai complété ce travail en tenant compte de cette perturbation dans les conditions de fonctionnement à « plat » et au « pendu ».

La perturbation de période est donnée pour un spiral plat par la formule

$$\frac{\Delta T}{T} = m\,\frac{R_0^2+3R_0'^2}{24A}\left[1+2{,}4\,\frac{R_0^2+\frac{6R_0'^4}{R_0^2+3R_0'^2}}{(R_0+R_0')^2}\times\frac{\theta_0^2}{\lambda_0^2}\right]$$

dans laquelle

m est la masse du spiral

R_0 et R'_0 les rayons extérieur et intérieur du spiral à l'état naturel

---

1. M. Hagg, Sur le calcul de certaines déformations élastiques, avec applications au spiral de montre. (*Bull. soc. math. de France t.* 56).

A le moment d'inertie du balancier

θ_0 l'amplitude

λ_0 l'angle d'enroulement du spiral à l'état naturel

Dans cette formule on peut négliger le terme R'^4_0 il reste donc

$$\frac{\Delta T}{T} = m \frac{R_0^2 + 3R'^2_0}{24A}\left[1 + 2,4 \frac{R_0^2}{(R_0+R'_0)^2} \times \frac{\theta_0^2}{\lambda_0^2}\right]$$

elle est donc de la forme

$$\frac{\Delta T}{T} = \eta + \mu\, \theta_0^2$$

soit une partie constante et un terme dépendant de l'amplitude.

D'après (1), seul le terme $\mu\theta_0^2$ entre dans ε_i.

Nous aurons donc à calculer comme pour la perturbation due à l'échappement.

$$Y' = \int_0^t \frac{\Delta T}{T} dt \quad \text{avec} \quad \frac{\Delta T}{T} = \mu\, \theta_t^2$$

$$\text{et} \quad dt = -\frac{2}{D_1}(\theta_t + A_1)\, d\theta_t$$

il vient après intégration

$$(52) \qquad Y' = \frac{2}{D_1}\left[\frac{\mu A_1}{3}(\theta_0^3 - \theta_t^3) + \frac{\mu}{4}(\theta_0^4 - \theta_t^4)\right]$$

avec

$$(53) \qquad \mu = m \frac{R_0^2 + 3R'^2_0}{10A} \cdot \frac{R_0^2}{(R_0+R'_0)^2 \lambda_0^2}$$

Nous voyons que pour ces deux perturbations, nous pouvons écrire :

$$\int_0^{t_1} f(t)\, dt = \frac{2}{D_1} y_1 \; ; \; \int_0^{t_0} f(t)\, dt = \frac{2}{D_1} y'_0$$

$$\int_0^{t_1} f'(t)\, dt = \frac{2}{D_1} y'_1 \; ; \; \int_0^{t_0} f'(t)\, dt = \frac{2}{D_1} y'_0$$

Les formules (2), (3) et (4) donnant les états d'une montre

marchant à plat et au pendu et munie d'un échappement à ancre, deviennent finalement en tenant compte de (48)

$$(54)\qquad e_{t_1} = \frac{2U}{K}\left(\frac{t_1}{t_0}\,\gamma_0 - \gamma_1\right) \qquad (55)\qquad e'_{t_1} = \frac{2U}{K}\left(\frac{t_1}{t_0}\,\gamma_0 - \gamma'_1\right)$$

$$(56)\qquad e'_{t_0} = \frac{2U}{K}\,(\gamma_0 - \gamma'_0)$$

V

Exemples concrets étudiés théoriquement et expérimentalement

Nous avons indiqué que le couple fourni par la détente du ressort de barillet est en première approximation de la forme

$$(47)\qquad C = C_0 - kt$$

Pour la vérification expérimentale de la théorie nous avons réalisé un couple moteur fonction linéaire du temps, de la manière suivante :

La montre à étudier (dont on a enlevé le barillet) est fixée sur un montage comportant deux platines entre lesquelles peut tourner un cylindre. L'une des extrémités d'un fil est fixée à un point du cylindre, et l'autre à l'une des extrémités d'un ressort à boudin ; l'autre extrémité du ressort est reliée à un point fixe.

De cette manière lorsqu'on enroule le fil sur le tambour, on exerce sur celui-ci un couple qui est en fonction linéaire de l'angle d'enroulement du fil, puisque la force exercée pour produire un certain allongement du ressort à boudin est une fonction linéaire de l'allongement du ressort.

Le tambour porte à l'extrémité de l'un de ses pivots un entraîneur en liaison avec l'axe de centre de la montre à étudier.

De cette manière, l'angle de déroulement du tambour, qui est le même que l'angle dont tourne la roue de centre de la montre, étant une fonction linéaire du temps, le couple exercé sur l'axe de centre, et par l'intermédiaire des autres engrenages sur l'axe de la roue d'échappement est bien de la forme (47).

Les fig. 11 et 12, sont des photographies de l'ensemble et la fig. 13 représente schématiquement le montage de la montre à étudier.

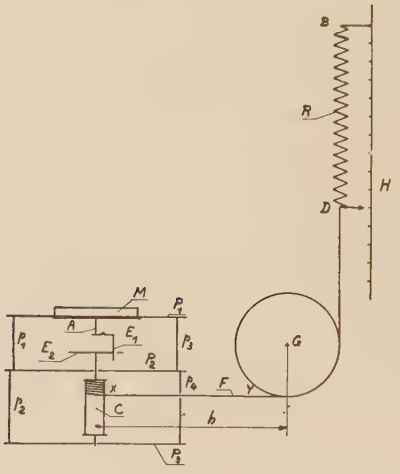

Fig. 13.

La montre M est fixée sur la platine P_1, son axe de centre A porte l'entraîneur E_1. Un tambour cylindrique C pivote entre les platines P_2 et P_3 parallèles entre elles et à la platine P_1; le pivot supérieur du tambour C porte un entraîneur E_2 qui assure par E_1 l'entraînement de l'axe de centre A de la montre.

Le couple moteur est fourni par le ressort à boudin R dont une des extrémités est fixée en un point B, et dont l'autre extrémité est attachée au fil F; ce fil passe sur une poulie très légère G; l'autre extrémité du fil F est fixée en un point du tambour C et le fil peut s'enrouler sur celui-ci.

L'extrémité inférieure D du ressort à boudin se déplace devant une échelle graduée H, ce qui permet après avoir déterminé la courbe d'étalonnage de ressort, de connaître à un instant quelconque le couple appliqué à l'axe du cylindre C, c'est-à-dire sur l'axe de la roue de centre de la montre.

Les platines P_1, P_2, P_3, sont liées d'une manière rigide par des piliers, schématiquement représentés par p_1, p_2, p_3 et p_4.

L'ensemble des trois platines et de la montre peut occuper 4 positions déduites les unes des autres par des rotations de l'ensemble de 90, 180 et 270° autour de l'axe X Y matérialisé par le

brin du fil F sans que la distance h de l'axe du cylindre C à l'axe de la poulie G, change; il s'ensuit que la montre peut occuper 4 positions différentes, soit 2 positions horizontales et 2 positions verticales opposées 2 à 2 sans que change le couple moteur ni sa loi de variation.

Caractéristiques de la montre étudiée.

Nos essais ont d'abord porté sur une montre de grand format dont le diamètre de platine est de 39 m/m.

a) *Caractéristiques du système balancier spiral.* — Le couple de de rappel de son spiral pour une rotation du balancier de 1 radian a été mesuré à l'aide de l'inertiomètre de la Société des Spiraux français, sa valeur est

$$k = 43 \text{ dynes/cm.}$$

Nous en avons déduit le moment d'inertie du balancier

$$A = 0{,}175\ g/cm^2$$

Les coefficients d'amortissement ont les valeurs suivantes, déterminées suivant la méthode exposée précédemment.

Position verticale : $\alpha = 0{,}025$, $f = 0{,}006$
Position horizontale : $\alpha = 0{,}027$ $f = 0{,}0006$

Nous prendrons comme valeur de α la valeur moyenne soit

$$\alpha = 0{,}026$$

masse du spiral	$m = 0{,}03$ g.
Rayon extérieur	$R_0 = 0{,}4$ cm.
Rayon intérieur	$R'_0 = 0{,}11$ cm.
angle d'enroulement	$\lambda_0 = 30\,\pi$

b) *Caractéristiques de l'échappement.*

Les caractéristiques de l'échappement sont :

angle de chute	$c = 2{,}5°$
angle de repos	$\Delta = 4°$
angle de levée de l'ancre	$\lambda = 11°$
angle de levée du balancier	$L = 37°$

Tirage moyen à l'entrée et à la sortie

$$\varphi = 16°$$

Angle de frottement acier sur rubis 8° 30′ d'après Grossmann.
Moment d'inertie de la roue d'échappement $A'' = 0{,}002\ g/cm^2$.

Le frottement constant suivant la position de la montre.

Le couple de frottement constant, qui est une des causes de l'amortissement du système balancier-spiral provient du frottement des pivots de l'axe du balancier dans les trous de pierres ou contre la surface de la butée dite contre-pivot (lorsque l'axe occupe la position verticale).

En position verticale de la montre, le couple de frottement constant, est déterminé par le poids P du balancier, le rayon R des pivots et le coefficient de frottement f, son expression est :

$$C_v = PRf$$

En position horizontale de la montre, ce couple de frottement a pour expression :

$$C_h = \varepsilon\, C_v$$

dans laquelle ε est une constante positive plus petite que l'unité, et qui dépend de la forme donnée à l'extrémité des pivots de l'axe de balancier ou à la forme de la surface de contact entre le pivot et le contre-pivot, et de la répartition des pressions sur cette surface.

Supposons la face du contre-pivot perpendiculaire à l'axe du balancier, et le pivot terminé par un plan perpendiculaire à son axe. Dans ces condiiions et en supposant la pression uniformément répartie, le calcul nous donnerait $\varepsilon = \frac{2}{3}$. Mais l'intersection du plan terminant l'extrémité du pivot avec la partie cylindrique est en général « raccordée » par une portion de surface torique, en admettant que la partie plane restante a pour rayon les 3/4 du rayon du pivot, ε est égal à 0,5, ce qui paraît être un maximum.

Pour déterminer facilement ε, nous avons calculé connaissant α, et pour une amplitude initiale de 360° la durée d'amortissement en fonction de ε, fig 14, il suffit, lors de la confection d'un « plat » à l'extrémité d'un pivot, de chronométrer la durée d'amortissement en position horizontale, pour une amplitude initiale de 360° pour connaître de cette façon ε.

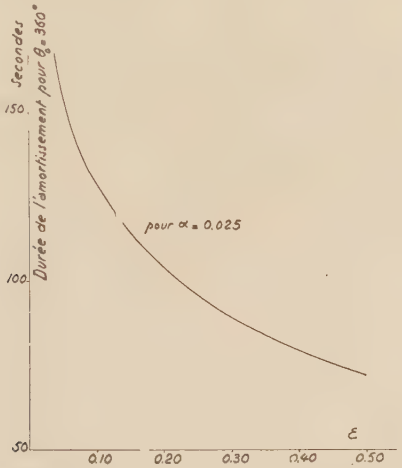

Fig. 14.

Calcul des Constantes Théoriques.

Le calcul numérique des constantes ne présente aucune difficulté. Nous donnons ci-après les valeurs numériques de ces constantes et faisons remarquer qu'il est inutile de faire le calcul numérique des constantes relatives à la marche de la montre en position horizontale, les divers coefficients des termes y' ou y'_0 des formules (64) et (65) se déduisent aisément des coefficients des termes de y_0 lorsque ε est connu en position horizontale, il en est de même pour l'expression de C en fonction de θ_0; (les numéros renvoient à l'étude théorique)

$$P = 4{,}13\,\pi^2 \quad (27) \qquad Q = 45{,}3\,\frac{\pi^2}{180^2} \quad (29)$$

$$R = 8{,}45\,\frac{\pi}{180} \quad (39) \qquad a = 0{,}52 \quad (40)$$

$$(42)\quad S = \frac{a}{R} = 0{,}0615\cdot\frac{180}{\pi} \qquad \frac{b}{R} = 0{,}0264\cdot\frac{180}{\pi}$$

$$\frac{A''\lambda^2 P}{L^2T^2R} = 0{,}0207\cdot\frac{180}{\pi} \qquad U = 0{,}0471\cdot\frac{180}{\pi}$$

Ce qui nous donne, pour les valeurs de $\varepsilon = 1$, 0,5 et 0,1, les expressions suivantes du couple C en fonction de l'amplitude θ_0 exprimée en centaines de degrés.

$$\varepsilon = 1 \quad C = 6{,}15\ \theta_0 + 8{,}22\ \theta_0^2$$
$$\varepsilon = 0{,}5 \quad C = 3{,}08\ \theta_0 + 8{,}22\ \theta_0^2$$
$$\varepsilon = 0{,}1 \quad C = 0{,}61\ \theta_0 + 8{,}22\ \theta_0^2$$

Ces trois courbes sont représentées fig, 15.

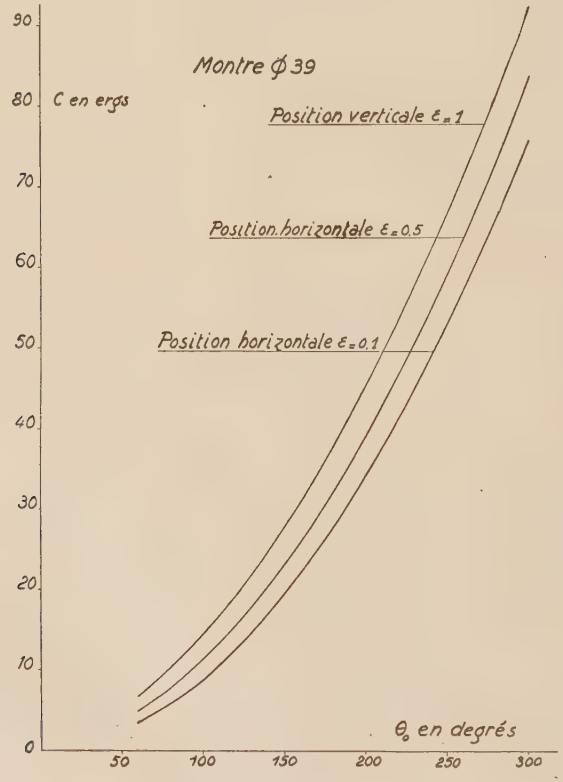

Fig. 15.

Il vient ensuite :

$$p = 0{,}3\,\pi^2 \quad q = 0{,}13\,\pi^2 \quad r = \frac{1}{3{,}4} \qquad (43)$$
$$s = 0{,}0114 \quad H = 0{,}0865\,\frac{\pi}{180} \quad I = 5{,}50\,\frac{\pi}{180}$$
$$J = 2{,}95$$

puis

$$(48)\quad A_1 = 0{,}653$$

$$(46)\quad a_1 = 0{,}0353\,\frac{\pi}{180} \qquad b_1 = 0{,}034\,\frac{\pi}{180}$$
$$c_1 = 9{,}7\ 10^{-6} \qquad d_1 = 0{,}118$$
$$e_1 = 0{,}0916$$

On calcule ensuite les coefficients des termes de Y donné par (51), il vient :

$$a_1 A_1 = 23000 \times \frac{\pi}{180} \times 10^{-6}, \quad \frac{c_1}{e_1} = 106 \times 10^{-6}, \quad b_1 - \frac{c_1}{e_1} = 490 \times 10^{-6}$$
$$b_1 A_1 = 389 \times 10^{-6}, \quad a_1 + b_1 A_1 = 1007 \times 10^{-6}, \quad A_1 e_1 = 600 \times 10^{-4}$$
$$d_1 - A_1 e_1 = 580 \times 10^{-4}, \quad e_1^2 = 84 \times 10^{-4}, \quad (d_1 - A_1 e_1)\frac{c_1}{e_1^2} = 67 \times 10^{-6}$$

La valeur de la constante relative à l'inertie du spiral est :

$$(53)\qquad \mu = 0{,}23 \times 10^{-6}$$

Nous obtenons pour valeur des expressions entre crochets de Y et de Y', dans le cas de la marche en position verticale en exprimant l'amplitude en degrés.

$$y = 10^{-6}\left[23000\left(\frac{1}{\theta_t} - \frac{1}{\theta_0}\right) + 8{,}55\left(\theta_0 - \theta_t\right) + 1007\, lg\, \frac{\theta_0}{\theta_t} + 67\, lg\, \frac{74+\theta_0}{74+\theta_t} + \frac{282}{10^9}\left(\theta_0^3 - \theta_t^3\right) + \frac{5{,}3}{10^9}\left(\theta_0^4 - \theta_t^4\right)\right]$$

Cette expression correspond à $\varepsilon = 1$.

Pour les valeurs de Y en position horizontale avec $\varepsilon = 0{,}5$ et $\varepsilon = 0{,}1$, nous remarquons que le coefficient $a_1 A_1$ est proportionnel à ε^3 et que les coefficients $a_1 + b_1 A_1$, $d_1 - a_1 e_1$, d_1, $\frac{\mu A_1}{3}$ sont proportionnels à ε, nous pouvons donc écrire directement les valeurs de y pour $\varepsilon = 0{,}5$ et $\varepsilon = 0{,}1$ il vient :

Pour $\varepsilon = 0{,}5$

$$y = 10^{-6}\left[5750\left(\frac{1}{\theta_t} - \frac{1}{\theta_0}\right) + 8{,}55\left(\theta_0 - \theta_t\right) + 503{,}5\, lg\, \frac{\theta_0}{\theta_t} + 33{,}5\, lg\, \frac{37+\theta_0}{37+\theta_t} + \frac{141}{10^9}\left(\theta_0^3 - \theta_t^3\right) + \frac{5{,}3}{10^9}\left(\theta_0^4 - \theta_t^4\right)\right]$$

$$y = 10^{-6}\left[230\left(\frac{1}{\theta_t} - \frac{1}{\theta_0}\right) + 8{,}55\left(\theta_0 - \theta_t\right) + 101\, lg\, \frac{\theta_0}{\theta_t} + 6{,}7\, lg\, \frac{7{,}4+\theta_0}{7{,}4+\theta_t} + \frac{28{,}2}{10^9}\left(\theta_0^3 - \theta_t^3\right) + \frac{5{,}3}{10^9}\left(\theta_0^4 - \theta_t^4\right)\right]$$

Ressort moteur. — Le ressort moteur représenté schématiquement par R fig. 13 a les caractéristiques suivantes :

Sous une charge de 300 g. le ressort subit un allongement depuis l'état naturel de 630 m/m ; cet allongement correspond à 48 tours d'enroulement du fil F sur le tambour cylindrique C.

La fig. 14 représente la courbe force-allongement du ressort R, déterminée par étalonnage au moyen de l'échelle graduée H.

FIG. 16.

Comme le tambour C fait un tour en une heure, le couple exercé par le ressort sera au bout de 24 heures de marche la moitié du couple initial.

En général, dans une montre, le rapport du couple exercé par le barillet après 24 heures de marche, au couple initial est supérieur à 0,5.

Courbes calculées des marches pour $\varepsilon = 1$, 0,5, et 0,1.

En fonction d'allongements connus nous avons fait des relevés de l'amplitude du système balancier-spiral de la montre étudiée et de cette manière nous avons établi la correspondance entre la force du ressort moteur et le couple appliqué sur la roue d'échappement.

Ceci nous permet de calculer la constante $\frac{2U}{k}$ de (63) et (55) nous avons k par (47)

$$k = \frac{30}{86400}$$

Nous ferons entrer 10^{-6} facteur commun de y (57, 58, 59) dans $\frac{2\,U}{k}$ nous obtenons pour cette valeur $\frac{1\,6}{100}$.

Les valeurs de θ_0 et θ_t sont relevées sur les courbes C (θ_t) fig. 15 pour diverses valeurs du couple C, c'est-à-dire pour diverses valeurs de t.

Les courbes des marches ainsi obtenues par calcul, donc déduites de la théorie de l'échappement à ancre sont représentées fig. 17, pour les valeurs de $\varepsilon = 1$ (position verticale), $\varepsilon = 0{,}5$

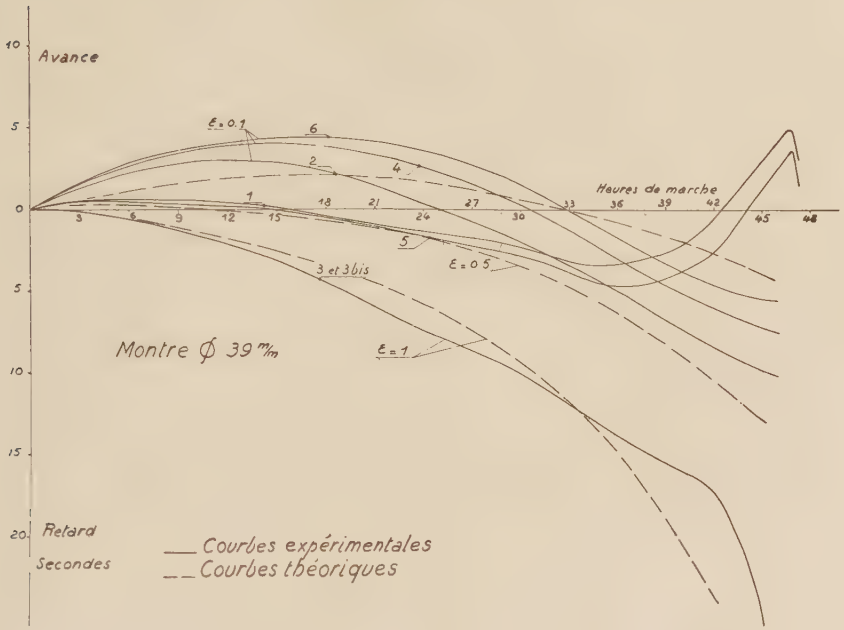

Fig. 17.

(position horizontale, pivots « plats »), $\varepsilon = 0{,}1$ (position horizontale pivots « ronds »).

Courbes expérimentales des Marches. — Nous avons employé pour enregistrer d'une manière continue la marche de la montre, un appareil dénommé « Vibrograph », permettant à l'aide d'un microphone recueillant les bruits de l'échappement, de tracer sur une bande de papier se déroulant d'un mouvement uniforme, un diagramme duquel on déduit facilement la marche de la montre a un instant donné.

Les caractéristiques de l'appareil enregistreur permettent un

enregistrement à la vitesse de déroulement de la bande de 75 cm. à l'heure et chaque fois que le diagramme passe sur la bande d'un bord à l'autre, la marche de la montre varie de $\frac{1}{60}$ de seconde.

Les courbes expérimentales des marches sont réprésentées fig. (17) ; le numéro des courbes indique l'ordre dans lequel elles ont été obtenues. La courbe correspondant à $\varepsilon = 1$ (marche en position verticale est la moyenne des deux courbes expérimentales obtenues pour deux positions opposées de la montre dans cette position).

Nous reproduisons fig. 18 une photographie échelle 100 d'une dent de la roue d'échappement.

Tous les enregistrements ont été obtenus dans une salle à température constante à $\pm 1°$.

Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux.

Si l'on s'en tient au domaine d'utilisation pratique d'une montre, c'est-à-dire entre 0 et 24 heures de marche, on constate que la correspondance des courbes de marche (courbes calculées et courbes expérimentales) est satisfaisante, en particulier pour les courbes obtenues en position verticale et en position horizontale pour $\varepsilon = 0{,}5$ la correspondance est moins bonne pour $\varepsilon = 0{,}1$ (position horizontale sur pivots sphériques).

Toujours entre 0 et 24 heures de marche, toutes les courbes présentent leur concavité tournées vers la région des marches négatives, ceci confirme ce que chacun sait : une montre munie d'un échappement à ancre « retarde » quand l'amplitude diminue.

Certains traités d'horlogerie, et nous ne citerons que celui de Saunier (1869) préconise pour égaliser les marches à « plat » et au « pendu » la pratique des pivots « plats » à l'axe de balancier.

En augmentant le couple de frottement constant en position horizontale, celui-ci se rapproche du couple de frottement constant en position verticale et l'on se rapproche de l'identité de fonctionnement du système balancier-spiral dans ces deux positions.

Nous constatons que restant dans le domaine de fonctionnement normal de la montre, l'écart entre les marches à « plat » et au « pendu » est environ réduit de moitié quand au lieu de terminer les pivots de l'axe de balancier par une portion de sphère,

ils sont terminés par un plan (l'écart des marches « plat-pendu » en 24 heures passe de 8 secondes dans le premier cas, à 4 secondes dans le deuxième).

Les enregistrements (1) et (5) obtenus en position horizontale sur pivots « plats » $\varepsilon = 0{,}5$ sont très voisins. Par contre les enregistrements (2), (4) et (6) obtenus en position horizontale sur pivots « ronds » $\varepsilon = 0{,}1$ présentent une dispersion beaucoup plus importante.

La fidélité du phénomène ce qui correspond en terme horloger à la *reprise de marche* paraît meilleure avec des pivots « plats » qu'avec des pivots « ronds ».

Lorsque le système balancier-spiral atteint de faibles amplitudes (inférieures à 120°), en position horizontale sur pivots « plats » la courbe de l'état qui jusque là a sa concavité tournée vers la région des marches négatives présente un point d'inflexion, sa dérivée croît alors lorsque l'amplitude diminue jusqu'à une certaine valeur de l'amplitude, puis décroît et s'annule ensuite pour devenir assez fortement négative. La courbe de marche de la montre présente donc d'abord un minimum puis un maximum.

Nous avons fait trois enregistrements en position horizontale sur pivot plat, pour les valeurs de ε égales à 0,5, 0,2 et 0,1 ; nous sommes partis d'un pivot plat et nous avons diminué en deux fois le cercle plan terminant son extrémité, ces enregistrements sont représentés fig. 19.

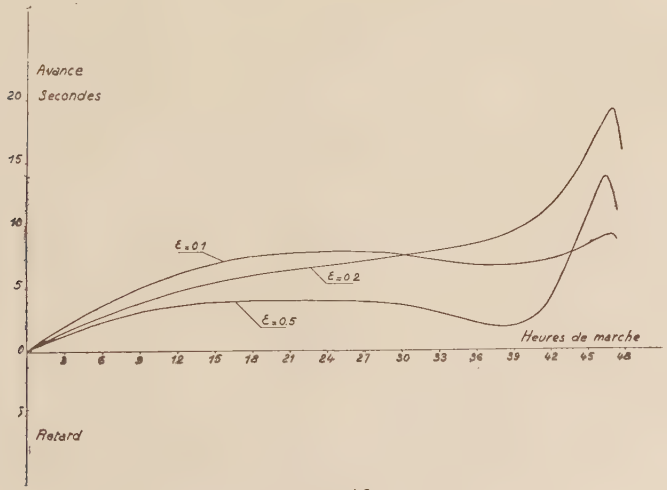

Fig. 19.

On constate que l'anomalie signalée plus haut existe pour les trois cas, mais d'autant plus accentuée que le cercle de contact entre le pivot et le contre-pivot est plus grand.

Cette anomalie semble à notre avis provenir du couple de frottement de pivotement.

M. Arcay dans sa thèse cite en effet pages 18 et 19 les travaux de Kimbal et de M. M. Jaquerod, Defossez et Mugeli sur le frottement de pivotement.

D'après ces auteurs, le coefficient de frottement est une fonction de la vitesse, et a l'allure de la fig. 20.

Fig. 20.

Aux faibles vitesses le coefficient de frottement passe par un maximum en *b* de part et d'autre duquel sa variation est très

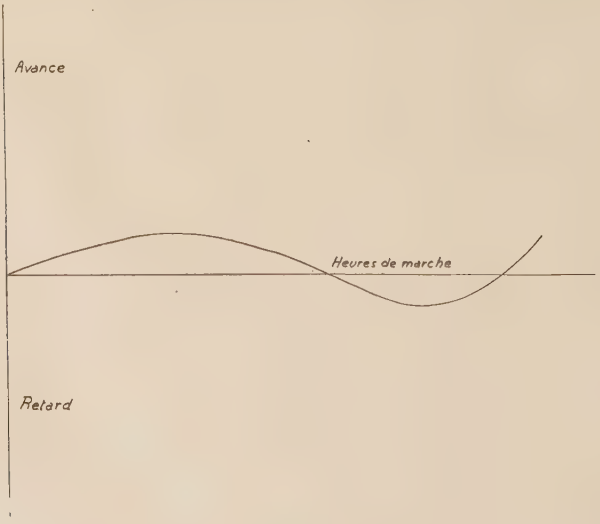

Fig. 21.

rapide. A partir du point C minimum de la courbe, la croissance du coefficient de frottement est lente en fonction de la vitesse.

Anomalie due à la roue d'échappement. — Il nous est arrivé de constater que des enregistrements de marche se présentaient de la façon suivante : fig. 21.

Pour toutes les positions (horizontale et verticale) et pour des pivots ronds et plats ; les courbes des états sont conformes à la théorie pour les grandes amplitudes, mais à partir d'une certaine valeur de celles-ci, la montre prend une avance qui croît continuellement jusqu'à l'arrêt complet, au fur et à mesure que l'amplitude diminue et ceci pour toutes les positions.

Nous avons constaté sur toutes les montres expérimentées et présentant cette anomalie, la présence d'une petite bavure à l'extrémité du talon des dents de la roue d'échappement.

Une de ces dents agrandie 100 fois est représentée fig. 22 et j'ai constaté qu'en conduisant le balancier du doigt pour examiner le fonctionnement de l'échappement, que la palette de sortie de l'ancre offrait un obstacle aux dents de la roue avant d'effectuer la chute.

Aux grandes amplitudes du balancier, le mouvement de l'ancre s'effectue avec une vitesse assez grande et les dents échappent sans difficulté, tandis qu'aux faibles amplitudes, l'ancre est légèrement freiné à la fin de l'impulsion et un choc supplémentaire se produit entre la cheville de plateau et la paroie opposée de l'entrée de la fourchette, choc donné après le point mort et en sens inverse du mouvement du balancier, et il est normal qu'il provoque une avance croissante lorque l'amplitude diminue.

A l'examen plus détaillé de ces dents de la roue d'échappement, nous pensons que la présence de cette bavure provient d'un échauffement anormal de la matière en cet endroit lors de l'usinage des plans d'impulsion des dents de la roue d'échappement.

Après avoir enlevé ces bavures sur une roue d'échappement en « frisant » les dents de la roue les courbes des marches sont devenues normales.

Caractéristiques de la montre 23,5 m/m.

Nous avons expérimenté une montre bracelet homme dont le diamètre de platine est 23,5 m/m.

a) *Caractéristiques du système balancier spiral.* — Le couple de rappel du spiral a été mesuré de la même manière que dans l'exemple précédent, sa valeur est :

$$k = 4 \text{ dynes/cm.}$$

pour une rotation de 1 radian de l'axe de balancier à partir du point mort.

Le moment d'inertie du balancier déduit de cette valeur est

$$A = 0{,}016 \text{ g/cm}^2$$

Les coefficients d'amortissement ont les valeurs suivantes ;

$$\alpha = 0{,}036$$

valeur moyenne pour les positions horizontale et verticale.

$$f = 0{,}017$$

en position verticale.

Pour une montre de ce format, l'influence de l'inertie du spiral est négligeable vis-à-vis de l'influence de l'échappement.

b) *Caractéristiques de l'échappement.* — Les caractéristiques de l'échappement sont les suivantes :

angle de chute	$c = 3°$
angle de repos	$\Delta = 4°$
angle de levée de l'ancre	$\lambda = 12°$
angle de levéé du balancier	$L = 45°$
Tirage moyen à l'entrée et à la sortie	$\varphi = 15°$
Moment d'inertie de la roue d'échappement	$A'' = 0{,}0004$

Calcul numérique des constantes théoriques.

Le calcul numérique des constantes théoriques s'effectue de la même manière que pour l'exemple précédemment traité et nous ne le reproduisons pas. Nous donnerons l'expression du couple d'entretien C en fonction de θ_0 pour les valeurs de ε égales à 1 — 0,5 et 0,1.

On obtient :

pour $\varepsilon = 1$ $\quad C = 1{,}70\ \theta_0 + 1{,}08\ \theta_0^2$

$\varepsilon = 0{,}5$ $\quad C = 0{,}85\ \theta_0 + 1{,}08\ \theta_0^2$

$\varepsilon = 0{,}1$ $\quad C = 0{,}17\ \theta_0 + 1{,}08\ \theta_0^2$

l'amplitude θ_0 étant exprimée en centaines de degrés, ces courbes sont représentées fig. 23.

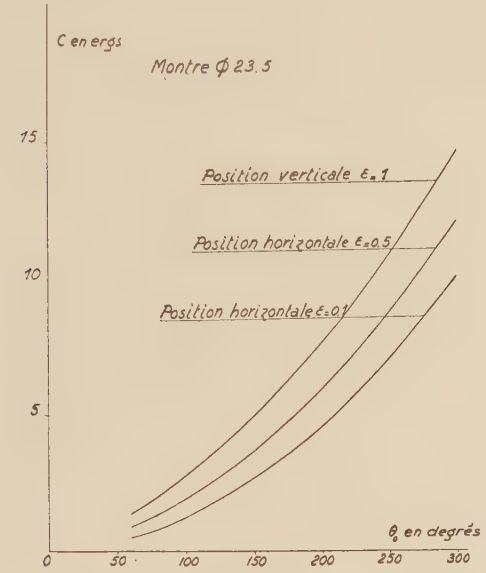

FIG. 23.

Dans le cas ou $\varepsilon = 1$ ce qui corresond à la marche en position verticale y a pour expression

$$y = 10^{-6}\left[148000\left(\frac{1}{\theta_t}-\frac{1}{\theta_0}\right)+12{,}9\left(\theta_0-\theta_t\right)+3120\,lg\frac{\theta_0}{\theta_t}+218\,lg\frac{157+\theta_0}{157+\theta_t}\right]$$

Nous aurons de même pour $\varepsilon = 0{,}5$

$$y = 10^{-6}\left[37000\left(\frac{1}{\theta_t}-\frac{1}{\theta_0}\right)+12{,}9\left(\theta_0-\theta_t\right)+1560\,lg\frac{\theta_0}{\theta_t}+109\,lg\frac{78+\theta_0}{78+\theta_t}\right]$$

et pour $\varepsilon = 0{,}1$

$$y = 10^{-6}\left[1480\left(\frac{1}{\theta_t}-\frac{1}{\theta_0}\right)+12{,}9\left(\theta_0-\theta_t\right)+312\,lg\frac{\theta_0}{\theta_t}+21{,}8\,lg\frac{16+\theta_0}{16+\theta_t}\right]$$

Résultats théoriques et expérimentaux.

Nous avons expérimenté cette montre en utilisant le même ressort moteur qui nous a servi pour les essais de la montre de 39 m/m. de diamètre, son armage initial a été réduit à 10 tours.

Les résultats théoriques et expérimentaux sont représentés fig. 24; ils sont donnés pour la position vérticale $\varepsilon = 1$, et pour

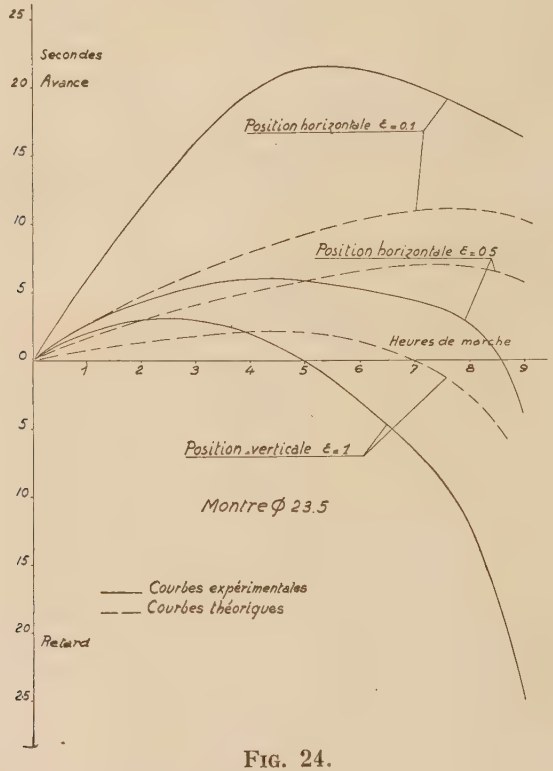

Fig. 24.

les positions horizontales sur pivots « plats » $\varepsilon = 0{,}5$ et sur pivots « ronds » $\varepsilon = 0{,}1$.

Dans cet exemple l'expérience montre que l'écart « plat pendu » est réduit dans une proportion nettement plus importante que dans le cas d'une montre de grand format par l'emploi des pivots plats à l'axe de balancier.

Après 5 heures de marche (sur 10) l'écart plat pendu est de 5 sec. avec pivots « plats », il est d'environ 20 sec. avec des pivots « ronds ».

L'anomalie constatée sur la montre de grand format, dans la position horizontale sur pivots plats, se retrouve dans cet exemple mais très atténuée, en effet la courbe expérimentale de l'état est seulement « applatie » dans la région comprise entre 5 et 7 heures de marche.

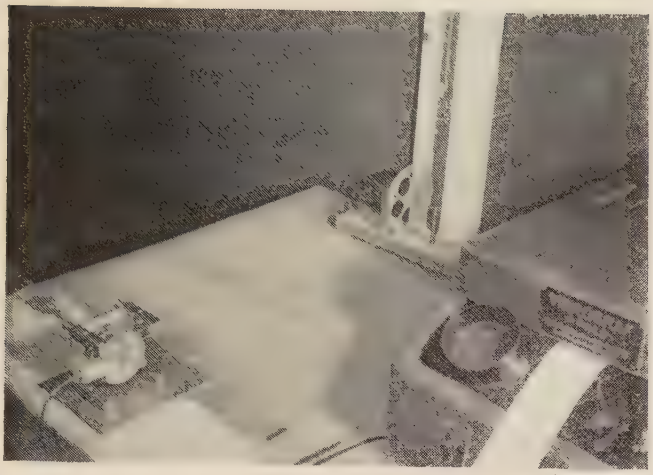

Fig. 11.

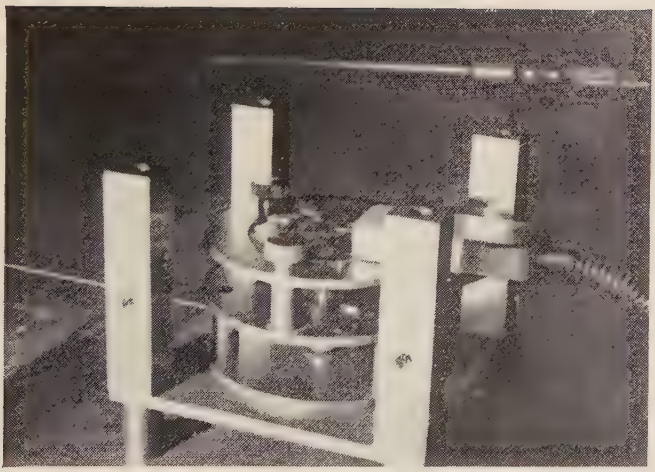

Fig. 12.

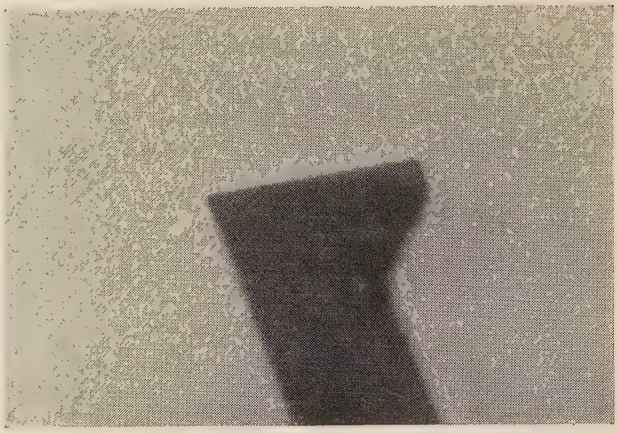

Fig. 18.

Fig. 22.

Les diamètres des pivots des deux axes de balanciers ne sont pas très différents tandis que le poids des balanciers sont dans le rapport de 4 à 1, et il en est de même de la pression entre le plat des pivots et le contre-pivot, ce qui paraît être la raison d'une anomalie moins marquée pour la montre de petit format que pour la grande pièce.

Validité des essais.

Considérons une montre entretenue par un ressort dont le couple est :

$$C = C_0 - k_1 t \tag{57}$$

C est nul au bout du temps

$$t_1 = \frac{C_0}{k_1}$$

t_1 est la durée de la marche théorique de cette montre avec le ressort défini par (66).

Appliquons à cette montre, et pour la même position de fonctionnement, le couple

$$C = C_0 - k_2 t$$

fourni par un autre ressort donnant le même couple initial, la durée de marche dans ce cas sera

$$t_2 = \frac{C_0}{k_2}$$

Lorsque le couple atteint la valeur commune C' respectivement au bout du temps t'_1 dans le premier cas et t'_2 dans le second, on a les mêmes valeurs de l'amplitude θ, et des quantités y_0 et y_1 de (54).

Supposons d'autre part que la montre soit réglée avec le chronomètre idéal de telle manière que son écart soit nul, au temps

t'_0 dans le premier cas et au temps t''_0 dans le second et que nous ayons en outre

$$\frac{t'_0}{t''_0} = \frac{t_1}{t_2}$$

nous aurons aussi

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{t'_1}{t'_2} = \frac{t'_0}{t''_0}.$$

L'état de la montre sera avec le premier ressort au temps t'_1

$$e_{t'_1} = \frac{a}{k_1} = \frac{a t_1}{C_0}$$

a étant une constante.

Avec le deuxième ressort, l'état de la montre sera à l'instant t'_2

$$e_{t'_2} = \frac{a}{k_2} = \frac{a t_2}{C_0}$$

nous tirons

$$\frac{e_{t'_1}}{e_{t'_2}} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{t'_1}{t'_2}$$

Les courbes des états obtenues dans ces deux cas sont donc homothétiques dans le rapport des durées de marche.

Ceci nous autorise à utiliser le même ressort moteur pour les essais de montres différentes, il suffit ensuite de faire le même changement d'échelle sur les deux axes.

Dans le cas de la montre de 23,5, il faudrait multiplier les nombres portés par les échelles par 4,8 pour obtenir les états de la montre avec une durée de marche de 48 heures au lieu de 10 les courbes étant conservées.

CONCLUSIONS PRATIQUES

Nous allons dégager en quelques points les résultats pratiques de cette étude, résultats qui confirment ce que bien des horlogers ont acquis par une longue expérience.

Les résultats théoriques ont montré une assez bonne correspondance avec les résultats expérimentaux.

1) Les courbes des états d'une montre munie d'un échappement à ancre, présentent en général dans les conditions normales d'utilisation, leurs concavités tournées vers la région des états négatifs le retard augmente lorsque l'amplitude diminue.

2) L'écart entre la courbe des états obtenus en position verticale, et la courbe des états obtenus en position horizontale est plus faible si les pivots de l'axe de balancier sont terminés par des « plats », que s'ils sont terminés par une calotte sphérique.

3) Nous avons essayé d'analyser les anomalies présentées par ces courbes, ce qui nous a conduit à observer des défauts de fabrication sur les dents de roues d'échappement.

4) Nous avons constaté une meilleure fidélité dans les résultats de marche en position horizontale lorsque l'axe de balancier est terminé par des pivots plats.

5) Si nous convenons d'appeler « erreur d'isochronisme d'entretien » la différence entre l'état d'un chronomètre après 12 heures de marche et la moyenne de son état initial et de son état après 24 heures de marche en position horizontale, cette quantité caractérise la « courbure » de la courbe des états, et par cela la qualité « isochrone » de l'ensemble balancier-spiral et échappement.

6) Est-il possible de réduire l'écart « plat-pendu » ?

La possibilité de réduire cet écart, dépend de la possibilité de réaliser des conditions de fonctionnement identiques dans les deux positions.

Il faut donc que les couples de frottement constant à « plat » et au « pendu » soient aussi semblables que possible.

Pour augmenter le couple de frottement à plat, nous avons fait varier la surface de contact entre le pivot et le contre-pivot, il nous reste comme domaine à explorer, la variation du coefficient de frottement, entre l'extrémité du pivot et le contre-pivot, ce qui revient à faire varier la nature de ce dernier, c'est ce que nous comptons entreprendre dans un prochain travail.

Vu et lu,

Besançon, le 3 mai 1946

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Glangeaud

Vu et permis d'imprimer,

Besançon, le 7 mai 1946

Le Recteur de l'Académie,
Président du Conseil de l'Université,

Doucet

Toulouse. - Typ. Edouard Privat. — 5088 4 47